Etapa Final

Problema 1
Encuentra la suma de todas las soluciones de la ecuación

$$\left(x^2+5x+5\right)^{x^2-10x+21}=1.$$

Solución:
Debemos considerar 3 casos:

- El exponente es igual a 0.
  Resolviendo $x^2-10x+21=0$ nos da $x=7$ y $x=3$.
- La base es igual a 1.
  Resolviendo $x^2+5x+4=0$ nos da $x=-1$ y $x=-4$.
- La base es igual a -1 y el exponente es par.
  Resolviendo para $x^2+5x+6=0$ nos da $x=-3$ y $x=-20$. Pero reemplazando en la ecuación original solamente -3 da un valor par en el exponente.

Entonces la suma de las soluciones es $7+3-1-4-3=2$.

Problema 2
¿Cuál es el menor entero positivo que da un residuo de 1 cuando lo divides para 3 y un residuo de 11 cuando lo divides para 12?

Solución:
Sea N el número mencionado, este es de la forma $N=3p+1=12q+11$ donde p y q son enteros. Entonces

$$\begin{aligned}3p+1&=12q+11\\3p-12q&=10\\3(p-4q)&=10\end{aligned}$$

Como p y q son enteros, entonces $3(p-4q)$ es un múltiplo de 3. Como 10 no es múltiplo de 3 se concluye que no existe tal entero N.

Problema 3
Cuando realizamos $46\div 44$ nos da como *cociente* 1 y *residuo* 2. ¿Cuántos enteros positivos existen tales que al dividirlos para 44 su cociente es igual a su residuo?

Solución:
Dichos números N son de la forma $N=44c+r$ donde c es el cociente al dividirlos para 44 y r es el residuo. Nótese que como r es el residuo al dividir para 44, $0\leq r\leq 43$. Nos dicen que el cociente debe ser igual que el residuo, por lo tanto $N=44r+r=45r$ y como $r\in\{0,1,2,\ldots,42,43\}$ nos da un total de 44 soluciones.

Problema 4
Los números enteros positivos se ordenan de esta forma:

1	3	6	10	15 ...
2	5	9	14 ...	
4	8	13 ...		
7	12 ...			
11 ...				

Encuentra las coordenadas (fila, columna) del número 2016.
Nota: Las coordenadas del número 8 son $(3, 2)$.

Solución:
Si nos fijamos en la primera fila, el número en la coordenada $(1, n)$ es el n-ésimo número triangular, es decir

$$(1, n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Además, $2016 = \frac{63 \times 64}{2}$, por lo tanto, 2016 está en la coordenada $(1, 63)$.

Problema 5
¿Cúal número es mayor, A ó B, donde

$$A = \frac{1}{2016}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2016}\right) \quad \text{y} \quad B = \frac{1}{2017}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2017}\right)?$$

Demuestra que tu respuesta es correcta.

Solución:
Afirmamos que:

$$A = \frac{1}{2016}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2016}\right) > B = \frac{1}{2017}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2017}\right).$$

Para demostrarlo, sea $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2016}$. Entonces $A = \frac{1}{2016}S$ y $B = \frac{1}{2017}\left(S + \frac{1}{2017}\right)$.
De manera que, la desigualdad que propusimos puede ser escrita como:

$$\frac{1}{2016}S \overset{?}{>} \frac{1}{2017}\left(S + \frac{1}{2017}\right).$$

Después de multiplicar ambos lados por $2016 \cdot 2017$ la desigualdad propuesta es equivalente a:

$$2017S \overset{?}{>} 2016S + \frac{2016}{2017},$$

la cual, después de sustraer $2016S$ a ambos lados, es equivalente en cambio a:

$$S \overset{?}{>} \frac{2016}{2017}.$$

Pero $S > 1$, entonces se sigue que $S > \frac{2016}{2017}$ demostrando verdadera la última desigualdad y, por lo tanto, todas las desigualdades anteriores. En particular, la desigualdad propuesta inicialmente es correcta:

$$A = \frac{1}{2016}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2016}\right) > B = \frac{1}{2017}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2017}\right).$$

Problema 6

En un hexágono regular $ABCDEF$ con lado 1, AD intersecta a BF en G, y BD intersecta a EC en H. Calcule la longitud de GH.

Solución:

Sea H' el pie de la perpendicular desde H hasta AD. Dado que $\angle CDA$ es un ángulo inscrito que mide $\frac{120}{2} = 60°$, se sigue que $\triangle CDH'$ es un triángulo "$30 - 60 - 90$", entonces $DH' = \frac{1}{2}$ y $CH' = BG = \frac{\sqrt{3}}{2}$. También, $H'G = CB = 1$. Nótese que, como $BG \parallel HH'$, entonces $\triangle DH'H \sim \triangle DGB$ con razón de $1/3$. Por lo tanto $HH' = BG/3 = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Por el Teorema de Pitágoras,

$HG^2 = H'H^2 + H'H^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 1 = \frac{13}{12}$.

Entonces $HG = \boxed{\frac{\sqrt{39}}{6}}$.