Etapa Final

Problema 1

Sea $n > 1$ un entero positivo impar. Demuestra que 80 divide a $n^5 - n$.

Solución 1:

Usaremos inducción. Para el caso base $n = 3$ tenemos $80 \mid 3^5 - 3$. Supongamos para algún k que $80 \mid k^5 - k$. Hay que demostrar que $80 \mid (k+2)^5 - (k+2)$, usando el paso inductivo tenemos que $80 \mid (k+2)^5 - (k+2) \iff 80 \mid (k+2)^5 - (k+2) - (k^5 - k) \iff 80 \mid (k+2)^5 - k^5 - 2 \iff 80 \mid 10(k+1)^2(k^2+2k+3)$. Sabemos que k es impar, asi que $2 \mid k+1 \implies 4 \mid (k+1)^2$, además (k^2+2k+3) es $(\text{impar} + \text{par} + \text{impar})$ asi que $2 \mid (k^2+2k+3)$. Como $80 = 10 \times 4 \times 2$ entonces $80 \mid 10(k+1)^2(k^2+2k+3)$. ■

Problema 2

Sea S un conjunto con seis elementos. ¿De cuantas maneras distintas puede uno seleccionar dos subconjuntos, no necesariamente distintos, de S de manera que la unión de los dos subconjuntos sea S? El orden de la selección no importa; por ejemplo, el par de subconjuntos $\{a, c\}$, $\{b, c, d, e, f\}$ representa la misma selección que el par $\{b, c, d, e, f\}$, $\{a, c\}$.

Solución:

Llamemos m y n a los dos subconjuntos. Cada elemento de S, podemos asignarlo ya sea a m, a n, o a ambos. Como hay 6 elementos y 3 opciones para cada uno, eso nos deja con 3^6 posibles métodos de selección. No obstante, debido a que el orden de los subconjuntos no importa, cada posible selección se la está contando doble, excepto en el caso cuando tanto m como n contienen todos los 6 elementos de S. De ahí que nuestra respuesta final es $\frac{3^6-1}{2} + 1 = \boxed{365}$.

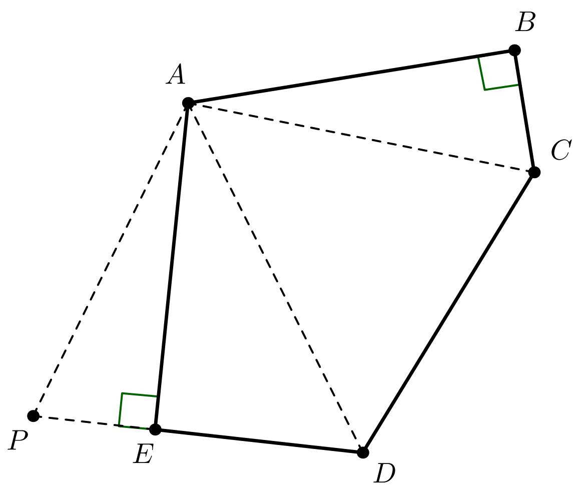
Problema 3

Sea $ABCDE$ un pentágono convexo tal que $AB = AE = CD = 1$, $\angle ABC = \angle DEA = 90°$ y $BC + DE = 1$.

Calcule el área del pentágono.

Solución:

Sea P un punto en la semirrecta DE (con E entre D y P) tal que $EP = BC$. Entonces tendremos $DP = 1$, y el triángulo EAP es congruente a BAC, entonces el área de $ACDP$ es igual al área del pentágono original. Como $DP = CD = 1$ y $AP = AC$ se sigue que los triángulos ACD y APD son congruentes y por lo tanto tienen igual área. La base del $\triangle APD$ es $DP = 1$ y la altura es $AE = 1$, así que el área del $\triangle APD$ es igual a $0,5$. Se concluye que el área del pentágono original es igual a 1.



Problema 4
Sean dos números reales x, y que cumplan la siguiente igualdad:

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1$$

Encuentre el valor de $x+y$.

Solución 1 (Racionalizar y factorizar):
Dividimos todo para $\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)$ y racionalizamos el lado derecho.

$$\begin{aligned}
x+\sqrt{1+x^2} &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}+y}\cdot\frac{\sqrt{1+y^2}-y}{\sqrt{1+y^2}-y}\\
&= \frac{\sqrt{1+y^2}-y}{1+y^2-y^2}\\
x+\sqrt{1+x^2} &= \sqrt{1+y^2}-y\\
x+y &= \sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+x^2}
\end{aligned}$$

"Racionalizamos" de nuevo el lado derecho

$$\begin{aligned}
x+y &= \sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}}\\
&= \frac{1+y^2-1-x^2}{\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}}\\
x+y &= \frac{(x+y)(y-x)}{\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

Manipulamos para que nos quede $(x+y)$ como factor común

$$\begin{aligned}
(x+y)\left(\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}\right) &= (x+y)(y-x)\\
(x+y)\left(\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}\right)-(x+y)(y-x) &= 0\\
(x+y)\left(\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}-y+x\right) &= 0
\end{aligned}$$

Se sabe que para todo real x: $\boxed{1+x^2>x^2}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x^2} &> \sqrt{x^2}=|x|\geq -x\\
\sqrt{1+x^2} &> -x\\
\sqrt{1+x^2}+x &> 0
\end{aligned}$$

Análogamente $\sqrt{1+y^2}-y>0$, entonces $\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}-y+x$ es positiva. Como $(x+y)\left(\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}-y+x\right)=0$, concluimos que $x+y=0$.

Solución 2
Multiplicamos ambos lados por $-y+\sqrt{1+y^2}$ para obtener

$$x+\sqrt{1+x^2}=-y+\sqrt{1+y^2}$$

Reordenamos

$$x+y=\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+x^2} \tag{1}$$

Análogamente, si multiplicamos la ecuación original por $-x+\sqrt{1+x^2}$ y reordenamos, también se cumple que

$$x+y=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2} \tag{2}$$

Sumando (1) y (2) concluimos que $x+y=0$.

Problema 5

Sea T un conjunto formado por enteros positivos que tiene la siguiente propiedad: si x, y son elementos distintos de T, con $x>y$, entonces $x-y$ tiene todos sus dígitos en el conjunto $\{2,3,6,9\}$. ¿Cuál es la mayor cantidad de elementos que puede tener T?

Solución:
Vamos a demostrar que la máxima cantidad es 5 y la demostración consta de dos partes:

a) *Daremos un ejemplo de un conjunto T con 5 elementos que cumpla la propiedad mencionada.*
Basta con tomar $T=\{1,4,7,10,33\}$ pues las diferencias son:

$$\begin{array}{llll}
4-1=3 & 7-1=6 & 10-1=9 & 33-1=32 \\
7-4=3 & 10-4=6 & 33-4=29 & \\
10-7=3 & 33-7=26 & & \\
33-10=23 & & &
\end{array}$$

y notamos que todas las diferencias tienen sus dígitos en el conjunto $\{2,3,6,9\}$.

b) *Demostraremos que si un conjunto T tiene más de 5 elementos, entonces no tiene la propiedad mencionada.*
En efecto, si tuviera más de 5 elementos, por el Principio de Casillas, habría 2 de ellos que dejan el mismo residuo al ser divididos para 5 (son 5 residuos posibles), denotemos con m y n a estos números, y supongamos sin pérdida de generalidad que $m>n$, con esto $(m-n)$ es múltiplo de 5, y por lo tanto el último dígito de $(m-n)$ es 0 ó 5, lo cual no es posible pues ninguno de ellos está en el conjunto $\{2,3,6,9\}$.

Problema 6

Se tienen 2^{2016} hojas, con el numero 1 escrita en cada una de ellas. En cada paso, escogemos dos hojas de papel distintas y reemplazamos los numeros de ambas hojas por la suma de estos. Demostrar que luego de $2016\cdot 2^{2015}$ pasos , la suma de los números escritos en todas las hojas es al menos 4^{2016}.

Demostración. Denotemos por P_k al producto de los números después de k pasos. Supongamos que en el paso $k+1$, reemplazamos los numeros a y b por $a+b$. Notemos que el producto de los números, ab es reemplazado por $(a+b)^2$ y los otros factores no cambian. Es decir: $P_{k+1} = \frac{(a+b)^2}{ab} P_k$. Ya que $(a+b)^2 \geq 4ab$ y que los números en las hojas son siempre positivos, podemos deducir que $P_{k+1} \geq 4P_k$. Ya que $P_0 = 1$, podemos concluir inductivamente que $P_k \geq 4^k$. En particular, $P_{2016\cdot 2^{2015}} \geq 4^{2016\cdot 2^{2015}} = (2^{2016})^{2^{2016}}$. Aplicando MA≥MG tenemos entonces que la suma de los numeros despues de $2016 \cdot 2^{2015}$ pasos es mayor o igual a $2^{2016} \cdot \sqrt[2^{2016}]{P_{2016\cdot 2^{2015}}}$ que a su vez por lo dicho anteriormente, es mayor o igual a $2^{2016} \cdot \sqrt[2^{2016}]{(2^{2016})^{2^{2016}}} = 2^{2016} \cdot 2^{2016} = \boxed{4^{2016}}$. ■